[This question paper contains 16 printed pages.]

**Your Roll No.....**

**Sr. No. of Question Paper : 5190** **H**

Unique Paper Code : 2272101202

Name of the Paper : Intermediate Mathematical Methods for Economics

Name of the Course : **B.A. (Hons.) Economics – DSC**

Semester : II

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 90

**Instructions for Candidates**

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. This question paper is divided into **three** sections.
3. Use of simple calculator is allowed.
4. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

**छात्रों के लिए निर्देश**

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

P.T.O.

2. यह प्रश्न पत्र **तीन** खण्डों में विभाजित है ।

3. साधारण कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति है ।

4. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।

## SECTION A

Attempt any **five** of the following questions : (5×8=40)

निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

1. (a) What is the derivative of $f(x, y) = x^2y^5$ at $P = (3,1)$ in the direction of the vector $Q = (4,-3)$.

(b) Find the equation of the tangent plane to $z = e^{xy} + y^2e^{y-1}$ at $(0,1)$. (4+4)

(क) वेक्टर $Q = (4,-3)$ की दिशा में $P = (3,1)$ पर $f(x, y) = x^2y^5$ का व्युत्पन्न क्या है।

(ख) टेंगेंट विमान के समीकरण को $z = e^{xy} + y^2e^{y-1}$ at $(0,1)$ पर खोजें।

2. (a) When is a set of vectors $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \in R^n$ said to be linearly dependent?

(b) Prove that the vectors $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix}7\\1\\11\end{pmatrix}$ are linearly dependent. (3+5)

(क) वैक्टर का एक सेट $a_1, a_2, \ldots\ldots a_n \in R^n$ को रैखिक रूप से निर्भर कब कहा जाता है?

(ख) साबित करें कि वैक्टर $\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\3\\5\end{pmatrix}$ और $\begin{pmatrix}7\\1\\11\end{pmatrix}$ रैखिक रूप से निर्भर हैं।

3. (a) Show that the following production function has elasticity of substitution 1 everywhere.

$$Y = Ax^{\alpha}y^{\beta},\ A, \alpha, \beta > 0$$

(b) The amount x of some good demanded depends on the price p of the good and the amount a the producer spends on research and development of the product: $x = f(p, a)$, with $f'_p(p, a) < 0$ and $f'_a(p, a) > 0$ for all $(p, a)$.

The price depends on the weather, measured by the parameter w, and the tax rate t: $p = g(w, t)$, where $g'_w(w, t) > 0$ and $g'_t(w, t) < 0$ for all $(w, t)$. The amount spent on R&D depends only on t: $a = h(t)$, with $h'(t) > 0$.

If the tax rate increases does the demand for the good necessarily increase or necessarily decrease, or neither? (4+4)

(क) दिखाएं कि निम्नलिखित उत्पादन फलन में प्रतिस्थापन । की हर जगह लोच है।

$$Y = Ax^{\alpha}y^{\beta},\ A, \alpha, \beta > 0$$

(ख) कुछ वस्तुओं की मात्रा x वस्तु की कीमत p पर निर्भर करती है और निर्माता उत्पाद के अनुसंधान और विकास पर खर्च करता है:$x = f(p, a)$, $f'_p(p, a) < 0$ के साथ और $f'_a(p, a) > 0$ सभी $(p, a)$ के लिए।

मूल्य मौसम पर निर्भर करता है, पैरामीटर w द्वारा मापा जाता है, और कर की दर t: $p = g(w, t)$, जहां $g'_w(w, t) > 0$ और $g'_t(w, t) < 0$ सभी $(w, t)$ के लिए।

R&D पर खर्च की गई राशि केवल t: $a = h(t)$, $h'(t) > 0$ के साथ निर्भर करती है। यदि कर की दर बढ़ जाती है तो क्या वस्तु की माँग आवश्यक रूप से बढ़ती है या अनिवार्य रूप से घटती है, या नहीं?

4. (a) Define the rank of a matrix.

(b) Find the rank of the following matrix for various values of p and q :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad (2+6)$$

(क) एक मैटिक्स के रैंक को परिभाषित करें।

(ख) p और q के विभिन्न मूल्यों के लिए निम्नलिखित मैटिक्स का रैंक खोजें :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & p & 7 & q \\ 4 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. (a) Find the equation of a hyperplane through the origin in the direction of the vectors (1, 2, 2) and (4, 1, –1). Where does the above plane intersect the line given by

$x_1 = -t + 2$, $x_2 = 2t - 1$ and $x_3 = t + 3$

(b) Let there exist a non-null vector x such that $Ax = \lambda x$, where $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ and $\lambda \in R$. Find $\lambda \in R$ and compute $A^{10}x$ for each value of $\lambda$ and the associated x. (4+4)

(क) वैक्टर (1, 2, 2) और (4, 1, –1) की दिशा में मूल के माध्यम से एक हाइपरप्लेन का समीकरण खोजें। उपरोक्त तल द्वारा दी गई रेखा को $x_1 = -t + 2$, $x_2 = 2t - 1$ और $x_3 = t + 3$ कहाँ काटता है?

(ख) चलो एक गैर-शून्य वेक्टर x मौजूद है जैसे कि $Ax = \lambda x$, जहाँ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ है और $\lambda \in R$। $\lambda \in R$ खोजें और $\lambda$ संबंधित x के प्रत्येक मान के लिए $A^{10}x$ की गणना करें।

6. (a) For the following function defined on $R^2$, find the critical points and classify them as maxima, minima, saddle:

$$f(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$$

(b) Let $f(x_1, x_2) = x^3 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 8x_1 - 2x_2 - 8$. Find the set of ordered pairs of $(x_1, x_2)$ for which $f$ is convex, if any. (4+4)

(क) आर $R^2$ पर परिभाषित निम्नलिखित कार्यों के लिए, महत्वपूर्ण बिंदु खोजें और उन्हें अधिकतम, न्यूनतम, सैडल के रूप में वर्गीकृत करें :

$$f(x, y) = 3x^4 + 3x^2y - y^3$$

(ख) $f(x_1, x_2) = x^3 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - 8x_1 - 2x_2 - 8$

$(x_1, x_2)$ के क्रमित युग्मों का समुंच्चय ज्ञात कीजिए जिसके लिए f उत्तल है, यदि कोई हो।

## SECTION B

Attempt any **three** of the following questions. (3×10=30)

निम्नलिखित में से किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

7. (a) Consider the system of equations :

$$x + 2y + z = 5$$

$$3x^2yz = 12$$

Show that the 3 variables can be divided into two sets {x and (y,z)} or {z and (x,y)} of 1 exogenous and 2 endogenous variables in a neighbourhood of x=2, y=1, z=1 so that the Implicit Function Theorem

is applicable. If the exogenous variable increases by 0.25, estimate the change in each of the endogenous variables for either case.

(b) An insect is crawling on a hot surface the temperature of which at the point x units to the right of the lower left corner and y units up from the lower left corner is given by

$$T(x,y) = 100 - x^2 - 3y^3$$

If the insect is at the point (2,1), in what direction should it move to cool off the fastest? How fast will the temperature drop in this direction?

(5+5)

(क) समीकरणों की प्रणाली पर विचार करें :

$$x + 2y + z = 5$$

$$3x^2 yz = 12$$

दिखाएं कि 3 चरों को x=2, y=1, z=1 के पड़ोस में 1 बहिर्जात और 2 अंतर्जात चर के दो सेट {x और (y,z)} या {z और (x,y)} में विभाजित किया जा सकता है, ताकि इंप्लिसिट फंक्शन प्रमेय लागू हो। यदि बहिर्जात चर 0.25 से बढ़ जाता है, तो किसी भी मामले के लिए प्रत्येक अंतर्जात चर में परिवर्तन का अनुमान लगाएं।

(ख) एक कीट एक गर्म सतह पर रेंग रहा है, जिसका तापमान निचले बाएँ कोने के दाई ओर बिंदु x इकाई और निचले बाएँ कोने से y इकाई ऊपर $T(x,y) = 100 - x^2 - 3y^3$ द्वारा दिया जाता है।

यदि कीट बिंदु (2,1) पर है, तो उसे सबसे तेजी से ठंडा होने के लिए किस दिशा में जाना चाहिए? इस दिशा में तापमान कितनी तेजी से गिरेगा?

8. (a) Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ and $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$. Is the equation Ax = b consistent for all possible values of $b_1$, $b_2$ and $b_3$?

(b) Any square matrix is said to be lower triangular if all the elements above the main diagonal are zeros. For any 3×3 lower triangular matrix, find out a necessary condition under which it is invertible. Show that its inverse is also lower triangular. (5+5)

(क) चलो $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -4 & 2 & -6 \\ -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}$ और $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$। क्या समीकरण $Ax = b$, $b_1$, $b_2$ और $b_3$ के सभी संभावित मानों के लिए संगत है?

(ख) किसी भी वर्ग मैट्रिक्स को निचला त्रिकोणीय कहा जाता है यदि मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी तत्व शून्य हैं। किसी भी $3\times3$ निचले त्रिकोणीय मैट्रिक्स के लिए, एक आवश्यक स्थिति का पता लगाएं जिसके तहत यह व्युत्क्रमणीय है। दर्शाइए कि इसका प्रतिलोम भी निम्न त्रिभुजाकार है।

9. (a) Determine whether the function $f(x,y) = ye^{-x}$ is quasiconcave for the region in which $x \geq 0$ and $y \geq 0$.

(b) A company produces two goods, butter and jelly and sells them at prices Rs.2 per kg for butter and Rs.3 per kg for jelly. The cost of production of x kgs of butter and y kgs of jelly is

$$C(x, y) = x^2 + 3xy + y^2.$$

How much butter and jelly should the company produce to get the maximum profit? (5+5)

(क) निर्धारित करें कि फलन $f(x,y) = ye^{-x}$ उस क्षेत्र के लिए क्रैसिकोनकेव है जिसमें $x \geq 0$ और $y \geq 0$ है।

(ख) एक कंपनी दो सामान, मक्खन और जेली का उत्पादन करती है और उन्हें मक्खन के लिए 2 रुपये प्रति किलोग्राम और जेली के लिए 3 रुपये प्रति किलोग्राम की कीमत पर बेचती है। x किग्रा मक्खन और y किग्रा जेली की उत्पादन लागत है

$$C(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$$

अधिकतम लाभ प्राप्त करने के लिए कंपनी को कितना मक्खन और जेली का उत्पादन करना चाहिए?

10. Consider the function $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$.

(a) Determine values of the constants a, b, and c such that f has a local minimum at the point (2/3, 1/3) with local minimum value of $-\frac{1}{9}$.

(b) With the values of a, b, and c found in part (a), find the maximum and minimum values of f over the set $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$.

(5+5)

फलन $f(x, y) = ax^2y + bxy + 2xy^2 + c$ पर विचार कीजिए।

(क) नियतांक a, b, और c के मान निर्धारित करें जैसे कि f का स्थानीय न्यूनतम बिंदु (2/3, 1/3) पर $-\frac{1}{9}$ के स्थानीय न्यूनतम मान के साथ है।

(ख) भाग (a) में पाए गए a, b और c के मूल्यों के साथ, सेट $S = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, 2x + y \leq 4\}$ पर f के अधिकतम और न्यूनतम मान खोजें.

## SECTION C

Attempt any two of the following questions. (2×10=20)

निम्नलिखित में से किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

11. (a) A matrix P is said to be orthogonal if P' P = I. Prove that a necessary condition for an orthogonal matrix is that any two different columns of this matrix are orthogonal.

(b) Find the values of k for which the following system of equations:

$$2x + ky + z = 2$$

$$4x + 2ky + kz = 4$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

has a unique solution, no solution or infinitely many solutions. (5+5)

(क) एक मैट्रिक्स P को ऑर्थोगोनल कहा जाता है यदि $P' P = I$। साबित करें कि ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स के लिए एक आवश्यक शर्त यह है कि इस मैट्रिक्स के दो अलग-अलग कॉलम ऑर्थोगोनल हैं।

(ख) k के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली :

$$2x + ky + z = 2$$

$$4x + 2ky + kz = 4$$

$$x + 2y + 3z = 6$$

एक अद्वितीय समाधान है, कोई समाधान नहीं है या अपरिमित रूप से कई समाधान हैं।

12. (a) The production function of a firm is $x^a y^b$. Its curren level of inputs is x=25 and y=100 and currentl $a = b = 0.5$. The firm adopts a new technolog that changes b to 0.504 with no change in a Estimate the input combination which will keep the total output the same and the sum of inputs the same. Use the following system of equations:

$$a \ln x + b \ln y = \ln z; \quad x + y = 125$$

(b) Is the sum of two homogeneous functions necessarily homogeneous? Is the product of two homogeneous functions necessarily homogenous? Prove or provide a counter example. (Note: The degree of homogeneity of the two functions is not necessarily equal). (5+5)

(क) एक फर्म का उत्पादन फलन $x^a y^b$ है। इसके इनपुट का वर्तमान स्तर x=25 और y=100 है और वर्तमान में $a = b = 0.5$ है। फर्म एक नई तकनीक को अपनाती है जो a में बिना किसी बदलाव के b से 0.504 में बदल जाती है। इनपुट संयोजन का अनुमान लगाएं जो कुल आउटपुट को समान रखेगा और इनपुट का योग समान रखेगा। समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली का प्रयोग करें :

$$a \ln x + b \ln y = \ln z; \quad x + y = 125$$

(ख) क्या दो सजातीय कार्यों का योग आवश्यक रूप से सजातीय है? क्या दो समरूप फलनों का गुणनफल आवश्यक रूप से समरूप है? एक प्रति उदाहरण साबित करें या प्रदान करें। (ध्यान दें: दो कार्यों की एकरूपता की डिग्री आवश्यक रूप से समान नहीं है)।

13. (a) In a competitive market, a firm produces good Q according to the function

$$Q(K, L) = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

where, K and L are capital and labour respectively. Given the unitary prices of Rs.5 for output and Rs.2 and Rs.10 for inputs, find the optimal values of K and L which maximise the profit $\pi$. Also, calculate the maximum profit, $\pi$.

(b) By drawing diagrams (or by making precise algebraic arguments), determine whether the following set is convex.

$$\{(x, y): xy \geq 1\}.$$ (7+3)

(क) प्रतिस्पर्धी बाजार में, एक फर्म कार्य के अनुसार अच्छी Q का उत्पादन करती है

$$Q(K, L) = 8K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{4}}$$

जहां, K और L क्रमशः पूंजी और श्रम हैं। आउटपुट के लिए रु. 5 और इनपुट के लिए रु. 2 और रु. 10 की एकात्मक कीमतों को देखते हुए, K और L के इष्टतम मान ज्ञात करें जो लाभ $\pi$ को अधिकतम करते हैं। साथ ही, अधिकतम लाभ, $\pi$ की गणना करें।

(ख) आरेख खींचकर (या सटीक बीजगणितीय तर्क बनाकर), यह निर्धारित करें कि निम्नलिखित सेट उत्तल है या नहीं।

$$\{(x, y): xy \geq 1\}.$$